

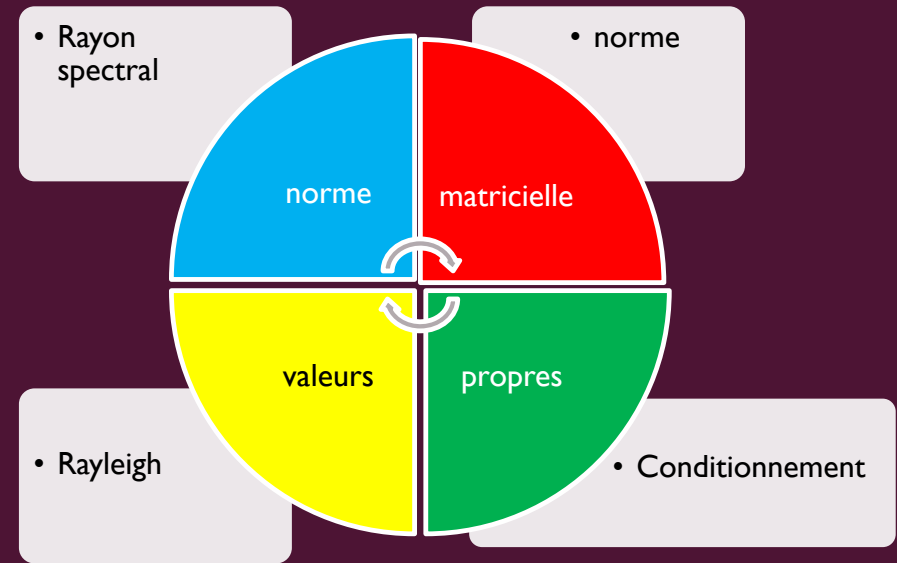
ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE

OPTIMISATION (CSCI04)

OUTILS THECNIQUES



Par: J.SAAB



QUOTIENT DE RAYLEIGH

A une matrice h ermitienne, $x \neq 0$ un vecteur non nul.
Le quotient de Rayleigh en x relatif   A est

$$r_A(x) = \frac{x^*Ax}{\|x\|^2}$$

Theoreme

$$\max_{x \neq 0} r_A(x) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$$

$$\min_{x \neq 0} r_A(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$$

Preuve

1) A hermitienne	1) ses v.p λ_i sont réelles positives 2) A est diagonalisable sur une base propre orthonormale $\{v_i\}$
2) $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ donc $x^* A x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i ^2$	
3) $x^* x = \sum_{i=1}^n x_i ^2$ et $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n, \forall i$ donnent:	
1) $\lambda_1 \leq r_A(x) \leq \lambda_n$ 2) $r_A(v_1) = \lambda_1$ et $r_A(v_n) = \lambda_n$	$\Rightarrow \begin{cases} \max_{x \neq 0} r_A(x) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \\ \min_{x \neq 0} r_A(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \end{cases}$

RAYON SPECTRAL:



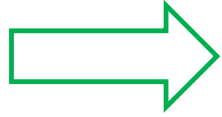
$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

- Si A est hermitienne

$$\rho(A) = \max_{x \neq 0} r_A(x)$$

- Norme vectorielle:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ 2) |\lambda x| = |\lambda| |x|, \quad \forall x \in \mathbb{C} \\ 3) |x + y| \leq |x| + |y| \end{array} \right.$$

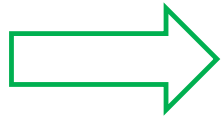


Pour $x = (x_1 \cdots x_n) \in \mathbb{C}^n$, on a

$$|x|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$|x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \text{ (norme euclidienne)}$$

$$|x|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$



Une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$ vérifie:

- 1) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- 2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
- 3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- 4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

NORME SUBORDONNEE

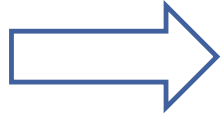
1- Si $|\cdot|$ est une norme vectorielle, alors pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{|A \cdot x|}{|x|}$$

est une norme matricielle, dite subordonnée à $|\cdot|$

2- La norme subordonnée vérifie

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{|A \cdot x|}{|x|} = \max_{|x|=1} |A \cdot x| = \max_{|x| \leq 1} |Ax|$$



Les norms matricielles associees aux norms vectorielles usuelles sont:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |C_i|_1$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* \cdot A)} = \sqrt{\rho(A \cdot A^*)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |L_i|_1$$

Les C_i et les L_i sont respectivement les colonnes et les lignes de A



Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute matrice A il existe une norme subordonnee telle que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$



Remarque: Pour toute norme subordonnée on a $\rho(A) \leq \|A\|$

Par le theoreme precedent:

$$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\| \in S} \|A\|$$

où S est l'ensemble des normes subordonnées

METHODES ITERATIVES

I-GENERALITES

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible;

$$A = M - N$$

Avec M est facilement inversible. Soit la suite:

$$\begin{cases} x_0 & \text{est donné dans } \mathbb{C}^n \\ M.x_{k+1} & = N.x_k + b \end{cases}$$

Si cette suite converge vers x alors x est la solution du systeme $Ax = b$



Trois questions se posent:

1- Comment choisir M et N

2- Comment garantir la convergence de la suite $(x_n)_n$

3- Comment agir sur la rapidité de la convergence

Résultats introductifs

$B = M^{-1}N$: Matrice de la méthode itérative; $\tilde{b} = M^{-1}b$

$$x_{k+1} = Bx_k + \tilde{b}, \quad k \geq 0 \text{ et } x_0 \text{ donné} \quad (I)$$

Théorème du point fixe:

Si f est une contraction alors f admet un point fixe : $f(a) = a$

Théorème: Si $\|B\| < 1$ alors la méthode (I) converge

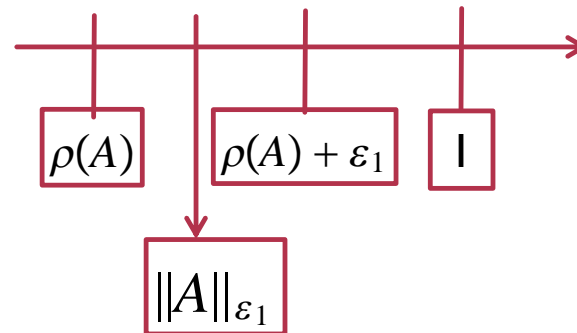


Pour tout $x \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ on a:

$$(A^k \cdot x \rightarrow 0)_{k \rightarrow \infty} \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$

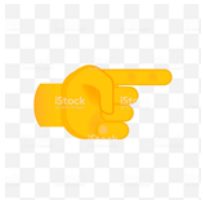
\Rightarrow) Prendre x un vecteur propre de A associé à λ

\Leftarrow)



1- $\forall \varepsilon > 0, \exists \|\cdot\|_\varepsilon$ telle que $\|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$

2- $\rho(A) < 1 \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0, \exists \alpha$ tels que $\rho(A) + \varepsilon < \alpha < 1$



$(\forall x_0, \forall b; \rho(B) < 1) \Leftrightarrow$ la méthode itérative converge

$\Rightarrow) (\exists \varepsilon > 0, \exists \|\cdot\|_\varepsilon$ telle que $\|B\|_\varepsilon \leq \rho(B) + \varepsilon < 1$). D'où

$\|B\|_\varepsilon < 1$ donc la méthode converge

$\Leftarrow)$ (Pour montrer (x_k) converge) $\Rightarrow (\rho(B) < 1 \forall b, \forall x_0)$ on montre $(\exists b, \exists x_0, \rho(B) \geq 1) \Rightarrow ((x_k)$ diverge)

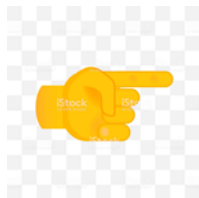
1) Soit $\lambda / \rho(B) = |\lambda| \geq 1$ et V un $\overrightarrow{v.p}$ associé à λ

$$2) x_k = Bx_{k-1} + \tilde{b} = \dots = B^k x_0 + \left(\sum_{i=0}^{k-1} B^i \right) \tilde{b} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} B^i \right) V$$

$$x_0 = 0; \tilde{b} = V.$$

$$3) x_k = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i \right) V = \begin{cases} \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} V & \text{si } \lambda \neq 1 \\ k \cdot V & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$$

Dans les deux cas $\|x_k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ et (x_k) diverge



Soit A une matrice H.D.P alors $M + N^*$ est H. Si de plus $M + N^*$ est D.P. alors la méthode converge